UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS V (MA-2112)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

22 de octubre de 2016

Continuidad, Diferenciabilidad, Plano Tangente, Máximos/Mínimos, Polinomio de Taylor de Segundo Orden

Resolución Primer Parcial 2003 Abr-Jul Tipo B

1. Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Diga si f es continua en el origen

Para concluir si f es continua en el origen sólo se debe demostrar que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

Ahora, tomemos la transformación a coordenadas polares $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$. Aplicando la transformación, el límite resulta

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta - r^3\cos\theta\sin^3\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r^2(\cos^3 - \cos\theta\sin^3\theta) = 0$$

Esto demuestra que la función es continua en el origen.

b) Halle las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

Aplicando la definición de derivada direccional, podemos calcular las derivadas parciales en el origen mediante

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}+t\vec{a}) - f(\vec{a})}{t}$$

Calculando f_x

$$f_x = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{0}+t\hat{\imath}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

Calculando f_y

$$f_y = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{0}+t\hat{\jmath}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

c) Diga si f es diferenciable en $(0,0)$

Aplicando la definición de diferenciabilidad

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{0}) - \nabla f(0,0)(\vec{x}-\vec{0})\|}{\|\vec{x}-\vec{0}\|} = 0$$

Expandiendo el límite

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \frac{|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} - 0 - x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \frac{|x^3 - xy^2 - x(x^2+y^2)|}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \frac{|-2xy^2|}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Si evaluamos el límite respecto a infinitas rectas dadas por $y = mx$, entonces

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \frac{|-2xy^2|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \to \lim_{x\to 0} \frac{|-2x^3m^2|}{(x^2+x^2m^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x^3|\cdot|2m^2|}{|x|^3(1+m^2)^{3/2}}$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{|2m^2|}{(1+m^2)^{3/2}} = \frac{|2m^2|}{(1+m^2)^{3/2}}$$

Puesto que el límite depende de la pendiente de la recta $y = mx$ que escojamos, entonces f no es diferenciable en $(0,0)$.

2. Halle el plano tangente a la superficie $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$, si este plano es paralelo al plano $y - x + 2z = 0$.

Primero, definamos $S = 2x^2 + y^2 + z^2$ y tomemos una superficie de nivel de S dada por $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Luego, un plano tangente a la superficie de nivel en un punto $\vec{a}$ de ella viene dado por

$$\nabla S(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

Ahora, vemos que el vector perpendicular al plano $P:\ y - x + 2z = 0$ viene dado por

$$\vec{n}_p = (-1, 1, 2)$$

Si ambos planos son paralelos, entonces obtenemos que

$$\nabla S(\vec{a}) = \lambda \vec{n}_p$$

Luego

$$\nabla S(\vec{a}) = (4a_x, 2a_y, 2a_z) \implies (4a_x, 2a_y, 2a_z) = \lambda(-1, 1, 2)$$

Se obtienen entonces las relaciones

$$a_x = -\frac{1}{4}\lambda, \qquad a_y = \frac{1}{2}\lambda, \qquad a_z = \lambda$$

Sustituyendo los valores de a_x, a_y, a_z en la ecuación de la superficie de nivel

$$2\left(-\frac{1}{4}\lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 + \lambda^2 = \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \lambda^2 = \frac{3}{2}\lambda^2 = 1 \implies \lambda = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Luego, el vector $\vec{a}$ resulta

$$\vec{a} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

finalmente, el plano tangente a la superficie de nivel paralelo al plano P viene dado por

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{\sqrt{3}}{6}, y - \frac{\sqrt{3}}{3}, z - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}y + \frac{4\sqrt{3}}{3}z - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{8}{3} = 0$$
$$-2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y + 4\sqrt{3}z = 11$$

3. Halle el máximo y mínimo absoluto de $f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$ en $A = \{|x| \leq 6,\ |y| \leq 2\}$.
Primero, hallemos los puntos críticos de f sobre todo su dominio

$$\nabla f = \vec{0} \implies (2x - 3y - 6, -3x - 2y + 2) = (0, 0)$$

Luego, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

del cual se obtienen las soluciones para x y y

$$x = \frac{18}{13} \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{14}{13}$$

Puesto que el punto solución pertenece a A, entonces escribamos la matriz Hessiana de f y su determinante para el punto solución.

$$H_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \implies \det H_f = -13$$

Dado que el determinante de la matriz Hessiana de f es menor que cero, el punto crítico es un punto de ensilladura.

Ahora, analizando la función en la frontera de A, obtenemos

a) Sobre la recta $x = 6$

$$f(6, y) = -y^2 - 16y,\ f'(6, y) = -2y - 16 = 0 \implies y = 8$$

b) Sobre la recta $x = -6$

$$f(-6, y) = -y^2 + 20y + 72,\ f'(-6, y) = -2y + 20 = 0 \implies y = -10$$

c) Sobre la recta $y = 2$

$$f(x,2) = x^2 - 12x,\ f'(x,6) = 2x - 12 = 0 \implies x = 6$$

d) Sobre la recta $y = -2$

$$f(x,-2) = x^2 - 8,\ f'(x,-6) = 2x = 0 \implies x = 0$$

De los cálculos anteriores, obtenemos que solo los puntos $(6,2)$ y $(0,-2)$ son candidatos a mínimo absoluto, con un valor de -36 y -8 respectivamente.

Ahora, evaluando a f en $(\pm 6, \pm 6)$

$$\begin{array}{r|l} f(6,2) = -36 & f(6,-2) = 28 \\ f(-6,2) = 108 & f(-6,-2) = 28 \end{array}$$

Obtenemos finalmente que los máximos y mínimos absolutos de f en A yacen sobre las *esquinas* de su frontera ∂A, y vienen dados por $(-6,2)$ y $(6,2)$ respectivamente.

4. Cerca del punto $(1,1,1)$ la ecuación $z^3 - 2xz + y = 0$ define a $z = f(x,y)$. Halle el polinomio de Taylor de segundo orden entorno al punto $(1,1)$.
Véase que el polinomio de Taylor de segundo orden viene dado por

$$f(\vec{a} + \vec{k}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{k} + \frac{1}{2!}\vec{k} \cdot H_f(\vec{a}) \cdot \vec{k}^t + \|\vec{k}\|^2 E_2(\vec{a}, \vec{k})$$

Donde $H_f(\vec{a})$ es la matriz Hessiana de f evaluada en el punto $\vec{a}$, $E_2(\vec{x}, \vec{a})$ es el término de error de segundo grado asociado al polinomio de taylor, y $\vec{k}$ es un vector genérico (k_1, k_2).

Despreciando el término de error, el cual tiende a cero cuando $\vec{k} \to \vec{0}$, podemos aproximar el valor de la función entorno al punto $(1,1)$ como

$$f(1 + k_1, 1 + k_2) \approx f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot \vec{k} + \frac{1}{2!}\vec{k} \cdot H_f(\vec{a}) \cdot \vec{k}^t$$

Ahora, calcularemos las derivadas de segundo orden de f utilizando derivación implícita:

- f_x

$$3z^2 \frac{\partial f}{\partial x} - 2z - 2x \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2z}{3z^2 - 2x}$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$$

- f_y

$$3z^2 \frac{\partial f}{\partial y} - 2x \frac{\partial f}{\partial y} + 1 = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{3z^2 - 2x}$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1$$

- f_{xx}

$$6z\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial x} - 2x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4\frac{\partial f}{\partial x} - 6z\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{3z^2 - 2x}$$

Luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -16$$

- f_{yy}

$$6z\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-6z\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{3z^2 - 2x}$$

Luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -6$$

- $f_{xy} = f_{yx}$

$$6z\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + 3z^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - 2\frac{\partial f}{\partial y} - 2x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{2\frac{\partial f}{\partial y} - 6z\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}{3z^2 - 2x}$$

Luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) = 10$$

Ahora, sustituyendo los valores en el polinimio de Taylor de segundo orden

$$\begin{aligned} f(1+k_1, 1+k_2) &\approx f(1,1) + \nabla f(1,1)\cdot(k_1,k_2) + \frac{1}{2!}(k_1,k_2)\begin{pmatrix}-16 & 10\\ 10 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix} \\ &\approx 1 + 2k_1 - k_2 + (-8k_1 + 5k_2, 5k_1 - 3k_2)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix} \\ f(1+k_1, 1+k_2) &\approx 1 + 2k_1 - k_2 + -8k_1^2 + 10k_2k_1 - 3k_2^2 \end{aligned}$$

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del primer parcial tipo B de Abril-Julio del 2003, y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com